# Простая иллюстрация для соотношений Крамерса-Кронига.

Рассмотрим электрическую схему, состоящую из конденсатора $C$, сопротивления $R$ и катушки $L$, подключенных последовательно к батарее с напряжением $\varepsilon$. Обозначим ток в цепи $I$, заряд конденсатора $q$, очевидно, $\dot{q} = I$.

Закон Ома

$$IR + \frac{q}{C} + L\dot{I} = \varepsilon.$$

При гармонической зависимости напряжения от времени $\varepsilon = \varepsilon_\omega e^{-i\omega t}$ ток и заряд также имеют аналогичный вид, а закон Ома записывается в виде

$$I_\omega \left( R - \frac{1}{i\omega C} - i\omega L \right) = \varepsilon_\omega. \tag{1}$$

Мощность диссипации в системе определяется законом Джоуля-Ленца

$$W = I\varepsilon. \tag{2}$$

Чтобы привести систему в соответствие с обозначениями теории линейного отклика, сопоставим эту мощность со средней по ансамблю (в момент $t$) от производной гамильтониана системы

$$W = \left\langle \frac{d}{dt}\hat{H} \right\rangle^t.$$

Зависящий от времени гамильтониан системы следует представить в виде $\hat{H} = \hat{X} f(t)$, где $\hat{X}$ определяет вид зависимости $\hat{H}$ от динамических переменных, а $f(t)$ - одинаковая для всех пространственных точек системы внешняя сила. Тогда выделяющееся в единицу времени тепло имеет вид

$$W = -X\frac{df}{dt}, \tag{3}$$

где $< \hat{X} >^t = X(t)$. Давайте в качестве динамических переменных системы рассматривать импульсы электронов, учавствующих в создании тока. Тогда величина $I$ в (2) является средней по ансамблю величиной от некоторой $\hat{I}$, которая зависит только от динамических переменных. Если $X \equiv I$, то для внешней силы (она, конечно, также гармоническая, $f \equiv f_\omega e^{-i\omega t}$) из сопоставления (2) и (3) имеем

$$\varepsilon = -\frac{df}{dt}, \qquad \varepsilon_\omega = i\omega f_\omega.$$

Итак, в терминах теории линейного отклика закон Ома эквивалентен соотношению

$$X \left( R - i \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \right) = i\omega f_\omega.$$

Коэффициент пропорциональности в частотном представлении между релаксирующей величиной (в данном случае, $X$) и вынужающей силой называется обобщенной восприимчивостью. В нашем случае она равна

$$\alpha(\omega) = \frac{i\omega}{R - i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]} = i\omega \frac{R + i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]}{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}. \tag{4}$$

Соотношения Кармерса-Кронига связывают вещественную и мнимую части обобщенной восприимчивости. Проверим, без ограничения общности, соотношение Крамерса-Кронига при $C = \infty$ (для простоты). Формулы для произвольной емкости получаются заменой $L \to L - 1/(\omega^2 C)$. В этом случае (4) имеет простой вид

$$\alpha(\omega) = \frac{i\omega}{R - i\omega L}.$$

Соотношения Крамерса-Кронига справедливо для $\alpha(\omega) - \alpha(\infty)$. В нашем случае $\alpha(\infty) = -1/L$, поэтому

$$\alpha(\omega) - \alpha(\infty) = \frac{i\omega}{R - i\omega L} + \frac{1}{L} = \frac{i\omega L + R - i\omega L}{L(R - i\omega L)} = \frac{R(R + i\omega L)}{L(R^2 + \omega^2 L^2)} = \alpha' + i\alpha'',$$

$$\alpha'(\omega) = \frac{R^2}{L(R^2 + \omega^2 L^2)}, \qquad \alpha''(\omega) = \frac{\omega R}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{5}$$

Проверим соотношение Крамерса-Кронига, имеющее вид

$$\alpha''(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int_\gamma \frac{\alpha'(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega.$$

Здесь через $\int_\gamma \ldots$ обозначен интеграл в смысле главного значения, взятый на промежутке $(-\infty, \infty)$. Подставляя под знак интеграла первое из равенств (5), получим

$$\alpha''(\omega_0) = -\frac{1}{\pi}\frac{R^2}{L^3} \int_\gamma \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)(\omega + i\frac{R}{L})(\omega - i\frac{R}{L})} = -\frac{1}{\pi}\frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{2\pi i}{2i\dfrac{R}{L}\left[i\dfrac{R}{L} - \omega_0\right]} - \frac{1}{\pi}\frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{\pi i}{\omega_0^2 + \dfrac{R^2}{L^2}}$$

Интеграл здесь взят по вычетам: мы замкнули контур интегрирования по большой полуокружности в верхней полуплоскости, воспользовавшись одновременно формулой Сохоцкого. Первое слагаемое в последнем равенстве соответствует умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов подынтегрального выражения, попавших внутрь контура интегрирования. Второе слагаемое соответствует вкладу дельта-функции из формулы Сохоцкого. Дальнейшие преобразования

$$\alpha''(\omega_0) == \frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{L}{R(\omega_0 - i\dfrac{R}{L})} - \frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{i}{\omega_0^2 + \dfrac{R^2}{L^2}} = \frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{L}{R} \cdot \frac{\omega_0 + i\dfrac{R}{L}}{\omega_0^2 + \dfrac{R^2}{L^2}} - \frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{i}{\omega_0^2 + \dfrac{R^2}{L^2}}$$

позволяют найти

$$\alpha''(\omega_0) = -\frac{R^2}{L^3} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 + \dfrac{R^2}{L^2}} \cdot \left[ -\frac{\omega_0 L}{R} - i + i \right] = \frac{\omega_0 R}{R^2 + \omega_0^2 L^2},$$

что совпадает со вторым равенством из (5). Таким образом, соотношение действительно выполняется.